

有限实验数据下工程结构概率建模及随机响应分析

张瑞景, 戴鸿哲

(哈尔滨工业大学 土木工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150090)

摘要:为了研究实验数据下工程结构输入参数的概率建模以及依据所建模型的响应分析的问题,本文提出了一种实验数据下工程结构概率建模及随机响应求解的方法。依据 Karhunen-Loeve 展开和任意多项式混沌(aPC)展开理论,提出了一种基于核密度估计的新型随机模型;发展了结构随机响应的求解技术,并提出了用于随机响应 aPC 系数估计的 D-optimal 加权插值方法,实现了结构响应的高精度求解。研究表明:本文的研究为实验数据下工程结构的合理随机建模和高效响应分析提供了一个有效的框架,本文方法有效。

关键词:概率模型; 随机响应分析; 实验数据; Karhunen-Loeve 展开; 多项式混沌展开; 实验设计; 非线性结构; 核密度估计

DOI: 10. 11990/jheu. 202305023

网络出版地址: <https://link.cnki.net/kcms/detail/23.1390.U.20240304.1931.004>

中图分类号: O324 文献标志码: A 文章编号: 1006-7043(2024)04-0674-08

Probabilistic modeling and stochastic response analysis of engineering structures with experimental data

ZHANG Ruijing, DAI Hongzhe

(School of Civil Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150090, China)

Abstract: In our quest to understand the probabilistic modeling of engineering structure inputs from experimental data and the associated response analysis of the constructed model, we have developed a new method that involves the construction of a nonGaussian random model using experimental data, followed by a random response analysis. First, we introduced an innovative random model that utilizes both Karhunen-Loeve expansion and arbitrary polynomial chaos (aPC) expansion. We then expanded on this by developing a technique for solving structural random responses based on this stochastic model. Ultimately, we developed the D-optimal weighted interpolation method for estimating the aPC coefficient of the random response, resulting in a highly precise solution for the structural response. The research indicates that our proposed method offers a practical framework for creating accurate random models and conducting efficient response analyses of engineering systems. These systems, which rely on real-life experimental data, can greatly benefit from our approach.

Keywords: probabilistic model; stochastic response analysis; experimental data; Karhunen-Loeve expansion; polynomial chaos expansion; experimental design; nonlinear structure; kernel density estimation

在随机工程问题中,合理考虑输入参数的随机性是获得可靠结构响应的关键^[1-2]。随机输入在工程应用中普遍存在,如材料特性、外部荷载、结构系统的初始和边界条件等^[3-4]。工程结构的随机参数往往具有明显的时空变异性和非高斯性,如岩土工程中的土壤参数和地下水高度、结构工程中的风荷载和地震激励以及水文中的降水和蒸发量等。此

时,结构参数应建模为非高斯随机场^[5-6];另一方面,在实际应用中,由于传感器的存储能力有限或增加观测的成本过高等原因,往往只能获得不确定的输入参数有限的实验数据^[7-10]。因此,从有限的实验数据中合理地建模非高斯输入参数,并进一步进行后续随机响应分析具有重要的工程价值。近年来,为了解决实验数据下工程结构概率建模及随机响应求解的问题,学者们发展了各类方法。其中,最具潜力的是基于多项式混沌 (polynomial chaos, PC) 展开的方法。此类方法的基本思想是首先对非高斯结构参数进行 Karhunen-Loeve (KL) 展开,然后再将

收稿日期: 2023-05-11.

网络出版日期: 2024-03-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (12272109).

作者简介: 张瑞景, 男, 博士研究生;

戴鸿哲, 男, 教授, 博士生导师.

通信作者: 戴鸿哲, E-mail: hzdai@hit.edu.cn.

得到的 KL 随机系数进行 PC 展开。获得结构参数的 PC 模型后,即可利用基于 PC 的响应求解技术进行结构随机响应的求解^[11-12]。

虽然有诸多优势,但基于 PC 展开的方法目前仍存在许多挑战。此类方法的第 1 个挑战为随机建模。具体来说,要想获得合理的输入参数模型,必须准确建模多维 KL 随机系数的非线性相关,并估计其联合概率密度。此外,构造从 KL 随机系数到 PC 变量的多维非线性变换还涉及到大量的高维积分。为此,有学者把 KL 随机系数假设为相互独立,从而大大简化了随机建模^[13-14]。为了考虑 KL 随机系数的非线性相关性,Ghanem 等^[15-16]利用极大熵分布、直方图估计器来估计 KL 随机系数的联合概率密度函数,然后再使用 Rosenblatt 变换构建 KL 随机系数的 Hermite PC 表示。Soize^[17]使用核密度估计器(kernel density estimation, KDE)估计 KL 随机系数的联合概率密度函数,然后通过蒙特卡罗积分求解 KL 随机系数 PC 展开的系数。使用 KDE 的优势在于其可避免其他密度估计器在高维密度估计中的维数灾难^[18]。

除随机建模外,PC 类方法的另一挑战则为后续随机响应分析的求解效率。众所周知,对于服从 Wiener-Askey 族分布的随机输入而言,使用 Wiener-Askey PC 可实现结构响应的最优收敛^[19]。然而,在实验数据有限的情况下,KL 随机系数的分布通常在 Wiener-Askey 族之外,继续采用 Wiener-Askey PC 会导致结构响应分析的效率降低;另一方面,即使已构造出能使响应最优收敛的 PC 展开,由于 PC 变量存在复杂的相关性,后续的结构响应分析仍具挑战^[20-21]。不难看出,要想使 PC 类方法可应用于实际工程结构分析中,关键为以下 2 方面:首先,要能够从实验数据中精确地建立基于 PC 的结构参数模型;其次,后续响应传播的效率应当足够高,以适应处理高维和大规模问题的工程需求。

本文开发了一种实验数据下的 PC 类结构随机分析方法。提出了一种 KDE 来估计 KL 随机系数的联合分布,从而得到结构参数的随机模型。进一步构造了 KL 随机系数的任意多项式混沌(aPC)展开,并利用一种基于 D-optimal 的加权插值法来求解结构的随机响应。

1 实验数据下非高斯结构参数的随机模型

实验数据下的随机结构分析第 1 步是合理建模非高斯结构输入参数。基于 KDE 的随机场建模方法,提出了一种可准确描述结构参数非高斯行为的随机场模型。

1.1 有限实验数据下非高斯结构参数的 KL 展开

令 $w(x_i, \theta)$, $i = 1, 2, \dots, M$ 为随机场 $w(x, \theta)$ 在 M 个位置 x_i 处的一条实验数据,则 N 条独立的实验数据构成了随机场 $w(x, \theta)$ 的实验数据集 \mathbf{W} 。其中, $\mathbf{W} = \{w(x_i, \theta_j)\}$, $i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, N$ 。随机场 $\mathbf{W}(\theta) = \{w(x_i, \theta)\}$ 的 m 阶截断 KL 展开可表示为:

$$\hat{\mathbf{W}}(\theta) = \bar{\mathbf{W}} + \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i} \phi_i \xi_i(\theta) \quad (1)$$

式中: $\bar{\mathbf{W}} = (\bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_M)$ 为 $\mathbf{W}(\theta)$ 的均值; $\{\lambda_i, \phi_i\}$ 是协方差矩阵 \mathbf{C}_w 最大的 m 个特征值和特征向量。本文中 \mathbf{W} 指的是实验数据集,而 $\mathbf{W}(\theta)$ 、 $\hat{\mathbf{W}}(\theta)$ 则指的是实验数据集 \mathbf{W} 所对应的随机场及其截断的 KL 展开。在有限观测下,均值可估计为 $\bar{W}_i \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N w(x_i, \theta_j)$, $i = 1, 2, \dots, M$, 协方差矩阵 \mathbf{C}_w 可估计为:

$$\hat{\mathbf{C}}_w = \frac{\mathbf{W}^T \mathbf{W}}{N-1} - \frac{\mathbf{W}^T \mathbf{U} \mathbf{U}^T \mathbf{W}}{N(N-1)} \quad (2)$$

式中 \mathbf{U} 为所有元素均为 1 的 N 维列向量。

KL 随机系数 $\xi_i(\theta)$ 则是由其实验数据表征,即:

$$\Xi_{ij}^{\text{obs}} = \lambda_i^{-1/2} (\mathbf{W}_j - \bar{W}_i) \phi_i, \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, N$$

其中 $\mathbf{W}_j = [w(x_1, \theta_j), w(x_2, \theta_j), \dots, w(x_M, \theta_j)]$ 。

若随机场 $\mathbf{W}(\theta)$ 是高斯场,则 $\xi(\theta) = \{\xi_i(\theta)\}$ 是相互独立的标准正态变量。然而对于一般的非高斯场 $\mathbf{W}(\theta)$, KL 随机系数 $\xi(\theta)$ 一般即不相互独立也不服从高斯分布。为了建模 KL 随机系数的非线性相关性,则需利用式(3)中 KL 随机系数样本 Ξ_{ij}^{obs} 估计其联合分布。KL 随机系数 $\xi(\theta)$ 的 KDE 估计为:

$$\hat{p}_{\Xi}(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_m(\Xi_j^{\text{obs}}, s^2 \mathbf{I}_m) \quad (4)$$

式中: $K_m(\Xi_j^{\text{obs}}, s^2 \mathbf{I}_m)$ 为均值为 Ξ_j^{obs} 协方差为 $s^2 \mathbf{I}_m$ 的 m 维联合正态的概率密度; $s = \{4/[N(2+m)]\}^{1/(m+4)}$ 是多维的 Silverman 带宽; $\Xi_j^{\text{obs}} = (\Xi_{1j}^{\text{obs}}, \Xi_{2j}^{\text{obs}}, \dots, \Xi_{mj}^{\text{obs}})$ 。一旦通过式(4)确定了 KL 随机系数的联合分布,随机场 $\mathbf{W}(\theta)$ 就可由式(1)直接确定。与其他类型的密度估计器(如极大熵分布、直方图等)不同,式(4)中的 KDE 可直接地推广至高维随机变量的密度估计,因此, KDE 可作为有限数据下 KL 展开格式随机建模的一个通用技术。然而,式(4)中将带宽选取为多维的 Silverman 带宽往往导致所得的随机场边缘分布不准确,因此,严重限制了该方法的实际应用。

1.2 基于改进 KDE 的随机模型

为了从实验数据中准确地建模非高斯结构参

数,本文提出了一种用于 KL 随机系数联合分布估计的新型 KDE。该新型 KDE 的优点为得到的随机场模型准确可重构非高斯参数的最关注的 2 个概率特征,即二阶相关性和边缘分布。由于随机场 $\mathbf{W}(\theta)$ 的边缘分布实质上是由一维 KL 随机系数的线性组合而得到的,因此,为了匹配结构输入参数的边缘分布,式(4)中的带宽 s 应根据一维 KDE 的选取准则来确定。一维 KL 随机系数的概率密度为:

$$\hat{p}_{\Xi_i}(\xi_i) = \int_{R^{m-1}} \hat{p}_{\Xi}(\xi) d\xi_1 \cdots d\xi_{i-1} d\xi_{i+1} \cdots d\xi_m = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_1(\Xi_{ij}^{obs}, s^2) \quad (5)$$

本文进一步将带宽选取为 $s^{(i)} = 0.9 \min\{\sigma_i, IQR_i/1.34\} N^{-1/5}, i = 1, 2, \dots, m$ 。其中, IQR_i 是样本 $\Xi_i = \{\Xi_{i1}^{obs}, \dots, \Xi_{iN}^{obs}\}$ 的四分位距。这是因为 Silverman 带宽仅在所估计的变量为正态分布时效果良好,而对于非高斯分布,特别是重尾分布、偏态分布或多峰分布, Silverman 带宽往往过大。有限数据下随机场的 KL 随机系数往往是非高斯分布,因此样本集 Ξ_i 中容易出现离群值。由于样本的四分位距对非高斯 KL 随机系数的样本离群值更加不敏感,因此与采用一维的 Silverman 带宽相比,利用四分位距能提供一个更合理的带宽估计。因此每个 KL 随机系数的非高斯特征可以被有效地建模,得到的随机模型可以准确地表征结构参数的非高斯行为。值得一提的是,带宽 $s^{(i)}$ 往往并不相等,本文进一步将所有的 KL 随机系数的带宽统一为:

$$s_{sh} = \sum_{i=1}^m w_i s^{(i)}, w_i = \lambda_i^{1/2} (\sum_{j=1}^m \lambda_j^{1/2})^{-1} \quad (6)$$

式中 w_i 是带宽 $s^{(i)}$ 的权重。 w_i 的值随 i 的增加而减小,即 i 越小的带宽 $s^{(i)}$ 对 s_{sh} 的贡献越大,与特征值更大的 KL 随机系数对随机场边缘分布贡献更大这一现象契合。确定带宽 s_{sh} 后, KL 随机系数 $\xi(\theta)$ 联合密度变为:

$$\hat{p}_{\Xi}(\xi) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N K_m(\Xi_j^{obs}, s_{sh}^2 \mathbf{I}_m) \quad (7)$$

一旦 KL 随机系数的联合分布通过式(7)确定,输入参数的非高斯模型即可由式(1)确定。

1.2.1 新型随机场模型的统计性质

边缘分布和二阶相关性是非高斯随机场 2 个统计特性。利用随机场 $\mathbf{W}(\theta)$ 和 KL 随机系数 $\xi(\theta)$ 的关系,随机场边缘分布 $\hat{W}_k(\theta), k = 1, 2, \dots, N$ 的特征函数可推导为:

$$\varphi_{\hat{W}_k}(u) = E[\exp(iu\hat{W}_k)] = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \exp\left(iuW_{kl} - \frac{1}{2}u^2 s_{sh}^2 \sum_{j=1}^m \lambda_j \phi_{jk}^2\right) \quad (8)$$

进一步对特征函数 $\varphi_{\hat{W}_k}(u)$ 进行傅里叶变换, $\hat{W}_k(\theta)$ 的概率密度函数为:

$$\hat{p}(\hat{W}_k) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N K_1(W_{kl}, s_{sh}^2 \sum_{j=1}^m \lambda_j \phi_{jk}^2) \quad (9)$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时,式(9)中的分布 $\hat{p}(\hat{W}_k)$ 依概率收敛到 $p(\hat{W}_k)$ [19]。因此,本文模型可准确地构建随机场 $\mathbf{W}(\theta)$ 的边缘分布。为了进一步研究本文随机模型的二阶相关性,首先推导式(7)中的 KL 随机系数的二阶性质:

$$E[\xi_k] = \int_{\Xi} \xi_k p_{\Xi}(\xi) d\xi = 0$$

$$E[\xi_k \xi_l] = \int_{\Xi} \xi_k \xi_l p_{\Xi}(\xi) d\xi = \left(\frac{N-1}{N} + \hat{s}_{sh}^2\right) \delta_{kl} \quad (10)$$

由式(10)可得,本文随机模型的二阶相关性为:

$$\text{cov}(W_k, W_l) = E[(W_k(\theta) - \bar{W}_k)(W_l(\theta) - \bar{W}_l)] = \left(1 - \frac{1}{N} + \hat{s}_{sh}^2\right) \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi_{ik} \phi_{il} \quad (11)$$

式中: $N \rightarrow \infty, \hat{s}_{sh} \rightarrow 1, (1 - 1/N + \hat{s}_{sh}^2) \rightarrow 1$, 因此, $\text{cov}(W_k, W_l) \rightarrow \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi_{ik} \phi_{il}$ 。此时,本文的模型可实现对随机场 $\mathbf{W}(\theta)$ 的均方最优逼近。由式(9)和式(11)可知,所提的新型随机模型可从实验数据中同时重构随机场 $\mathbf{W}(\theta)$ 的二阶相关性和边缘分布,从而准确地描述结构输入参数的非高斯特性。

2 结构响应分析的任意多项式混沌法

尽管 PC 类的方法可以求解结构的随机响应,由于在实验数据下传统的 Wiener-Askey PC 可能会导致较低的计算效率,PC 类方法在实际工程结构随机分析中的应用仍存在较大局限 [22]。本文结合了结构响应分析的 PC 类方法,然后将 KL 随机系数的联合分布选为 aPC 的权函数,从而导出了结构输入参数的 aPC 表示。随后,进一步发展了基于 aPC 展开的高效随机响应分析方法。

2.1 基于多项式混沌的结构随机响应分析

在基于 PC 的结构随机分析中,结构响应通常与结构随机参数投影到相同的 PC 子空间中。结构参数随机模型中 KL 随机系数 $\xi(\theta)$ 的 PC 展开为:

$$\xi_i(\theta) = \sum_{j=1}^P \alpha_{ij} \Psi_j(\boldsymbol{\eta}), 1 \leq i \leq m \quad (12)$$

式中: $\boldsymbol{\eta}(\theta)$ 为 m 维的 PC 变量; $P = (m+p)! / (m! p!)$ 为 PC 展开的截断项数, p 为 m 维标准正交多项式 $\Psi_j(\cdot)$ 的阶数; α_{ij} 则是 PC 系数。将式(12)代入式(1),即可得到非高斯输入场的 PC 展开为:

$$\hat{W}(\theta) = \bar{W} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^P \sqrt{\lambda_i} \phi_i \alpha_{ij} \Psi_j(\boldsymbol{\eta}) \quad (13)$$

随机模型 $\hat{W}(\theta)$ 的 PC 展开得以确定, 结构响应 $Y(\theta)$ 可投影在 PC 空间 $\{\Psi_j(\boldsymbol{\eta})\}_{j=1}^P$ 中。对于实际结构分析, 结构响应 $Y(\boldsymbol{\eta})$ 近似为:

$$Y(\boldsymbol{\eta}) \approx \sum_{k=0}^P \alpha_k \Psi_k(\boldsymbol{\eta}) \quad (14)$$

式(14)也可写为 $Y(\boldsymbol{\eta}) \approx \boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\eta})$ 。

2.2 任意多项式混沌展开的构造

随着截断项数 P 的增加, 不同类型的 PC 展开均可使式(14)中的 PC 近似响应收敛于真实响应。然而, 其收敛速度往往与 PC 基函数的选取密切相关。所提新型随机场模型 KL 随机系数的概率分布通常并不属于 Wiener-Askey 族, 因此使用 Wiener-Askey PC 不能实现随机响应的最优收敛。为了尽可能提高响应分析效率, 本文构造了 KL 随机系数的 aPC 展开^[23]。aPC 展开的基函数实质上是以 KL 随机系数的为权的多维正交多项式, 为构造 aPC 基函数。首先需指定一组最高阶数为 p 的单项式 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) = [\varphi_0(\boldsymbol{\xi}), \dots, \varphi_p(\boldsymbol{\xi})]^T$ 。随后, aPC 展开的基函数可构造为 $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{L}^{-1}$ 。其中, 上三角矩阵 \boldsymbol{L} 可通过下式定义的矩阵 \boldsymbol{G} 的 Cholesky 分解求得:

$$G_{ij} = \int_{\Xi} \varphi_i(\boldsymbol{\xi}) \varphi_j(\boldsymbol{\xi}) p_{\Xi}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = E[\varphi_i(\boldsymbol{\xi}) \varphi_j(\boldsymbol{\xi})] \quad (15)$$

构造 $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\xi})$ 的关键在于求解式(14)中的多维积分。一般地, 该积分应使用蒙特卡罗积分进行近似:

$$G_{ij} \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \varphi_i(\boldsymbol{\Xi}^{(k)}) \varphi_j(\boldsymbol{\Xi}^{(k)}) \quad (16)$$

式中 $\boldsymbol{\Xi}^{(k)}$ 为 KL 随机系数 $\boldsymbol{\xi}(\theta)$ 的第 k 个样本。虽然样本 $\boldsymbol{\Xi}^{(k)}$ 可通过 MCMC 方法产生, 其中涉及的数以万计次的联合概率密度计算导致抽样效率低。此外, MCMC 样本之间存在的自相关性会大大降低蒙特卡罗积分的精度。为了高效高精度地构造矩阵 \boldsymbol{G} , 本文使用了文献[24]中提出的 KL 随机系数的高效抽样方法。式(7)可写为:

$$p_{\Xi}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} p_{\Xi}(\boldsymbol{\xi} | X = i) \quad (17)$$

式中 $p_{\Xi}(\boldsymbol{\xi} | X = i) \sim \boldsymbol{K}_m(\boldsymbol{\Xi}_i^{\text{obs}}, \hat{s}_{\text{sh}}^2 \boldsymbol{I}_m)$ 服从均值为 $\boldsymbol{\Xi}_i^{\text{obs}}$, 协方差矩阵为 $\hat{s}_{\text{sh}}^2 \boldsymbol{I}_m$ 的 m 维正态分布。由式(17)可知, $p_{\Xi}(\boldsymbol{\xi})$ 是一种高斯混合分布。因此多维 KL 随机系数的独立样本可利用高斯混合分布的性质直接产生, 从而就可通过式(16)确定矩阵 \boldsymbol{G} , 并依据矩阵 \boldsymbol{G} 的 Cholesky 分解构造确定 aPC 展开格式。

2.3 基于 aPC 展开的结构随机响应分析

aPC 展开构造完毕后, 需开发求解结构随机响应的算法。众所周知, 基于 aPC 的结构响应分析关键在于求解式(14)中的 aPC 系数 α_k 。大体而言, 求解系数 α_k 的方法大体可分为侵入式和非侵入式2类, 由于非侵入式方法中的插值法可直接调用第三方软件进行结构分析^[25], 因此本文的研究主要围绕插值法来开展。插值法的精度和鲁棒性很大程度上取决于配置点的选择(即实验设计)。目前, 独立 PC 变量的实验设计方案已日趋完善, 而相关 PC 变量的实验设计方案还鲜有报道。基于 aPC 的响应分析的关键在于抽取 aPC 变量的蒙特卡罗样本。一旦获得 aPC 变量的样本, 就可直接开发出 aPC 变量的实验设计方案, 并进行后续的响应求解。

注意到 aPC 变量本质上是 KL 随机系数, 而 KL 随机系数服从混合高斯分布, 故 aPC 变量的独立样本可直接产生。因此, 各种独立 PC 变量下的实验设计方案即可直接推广至 aPC 变量的实验设计。为实现结构响应的高精度估计, 本文提出了一种 D-optimal 加权插值方法。首先, 本文将估计式(14)中 aPC 系数的问题列式为加权插值形式:

$$\boldsymbol{V}_{\text{ED}} \boldsymbol{\Psi}_{\text{ED}} \hat{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{Y}_{\text{ED}} \Leftrightarrow \hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{V}_{\text{ED}} \boldsymbol{\Psi}_{\text{ED}})^{-1} \boldsymbol{V}_{\text{ED}} \boldsymbol{Y}_{\text{ED}} \quad (18)$$

式中: 矩阵 $\boldsymbol{\Psi}_{\text{ED}}(i, j) = \Psi_j(\boldsymbol{\Xi}_{\text{ED}}^{(i)})$ 为 P 维方阵; 矩阵 $\boldsymbol{V}_{\text{ED}}(i, i) = [\sum_{j=1}^P \Psi_j^2(\boldsymbol{\Xi}_{\text{ED}}^{(i)})]^{-1/2}$ 为 P 维对角阵; $\boldsymbol{Y}_{\text{ED}} = [Y(\boldsymbol{\Xi}_{\text{ED}}^{(1)}), \dots, Y(\boldsymbol{\Xi}_{\text{ED}}^{(P)})]^T$ 为 P 维列向量。使用矩阵 $\boldsymbol{V}_{\text{ED}}$ 的目的在于提高通过式(18)求解 PC 系数的稳健性。

根据 D-optimal 理论, $\boldsymbol{\Xi}_{\text{ED}}$ 可通过求解优化问题确定:

$$\boldsymbol{\Xi}_{\text{ED}} = \underset{\dim(\boldsymbol{\Xi}_{\text{ED}}) = m \times P}{\text{argmax}} \det |\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{\Psi}^T(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\xi})| \quad (19)$$

式(19)中的优化问题可通过产生 $N_c \gg P$ 个相互独立的 aPC 候选样本 $\boldsymbol{\Xi}_c = [\boldsymbol{\Xi}_c^1, \boldsymbol{\Xi}_c^2, \dots, \boldsymbol{\Xi}_c^{(N_c)}]$, 然后利用选列主元的 QR 分解近似求解^[26]:

$$(\boldsymbol{V}_c \boldsymbol{\Psi}_c)^T \boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q} [\boldsymbol{R}_1 \quad \boldsymbol{R}_2] \quad (20)$$

式中: $\boldsymbol{V}_c(i, i) = [\sum_{j=1}^P \Psi_j^2(\boldsymbol{\Xi}_c^{(i)})]^{-1/2}$ 为 N_c 维对角阵, $\boldsymbol{\Psi}_c(i, j) = \Psi_j(\boldsymbol{\Xi}_c^{(i)})$ 为 $N_c \times P$ 维矩阵; \boldsymbol{Q} 为 P 维正交矩阵; \boldsymbol{R}_1 为 $P \times P$ 维非奇异上三角阵; \boldsymbol{P} 为使矩阵 \boldsymbol{R}_1 对角元素降序排列的 $N_c \times N_c$ 维置换矩阵。令 $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{P}^T \times [1, 2, \dots, N_c]$, 则 D-optimal 配置点为:

$$\boldsymbol{\Xi}_{\text{ED}} = \boldsymbol{\Xi}_c(\boldsymbol{\pi}_{\text{ED}}, :) \quad (21)$$

其中, $\boldsymbol{\pi}_{\text{ED}} = \boldsymbol{\pi}(1:N_{\text{ED}})$ 。一旦确定了配置点 $\boldsymbol{\Xi}_{\text{ED}}$, 结构响应的 aPC 系数即可通过式(18)估计。

2.4 有限实验数据下工程结构随机分析方法

本文提出的实验数据下的新型结构随机分析方

法总结如下:

1) 对非高斯结构参数的实验数据进行 KL 展开, 得到均值向量, 截断后的特征值、特征向量及 KL 随机系数 $\xi(\theta)$ 的样本实现;

2) 利用发展的新型 KDE 估计 KL 随机系数的联合概率密度 $\hat{p}_{\xi}(\xi)$, 并进一步通过式(1)构建结构参数的随机模型;

3) 产生 KL 变量的独立样本, 构造 aPC 基函数;

4) 再次产生 KL 变量 (aPC 变量) 的样本实现, 随后利用选列主元的 QR 分解确定用于加权插值法的 D-optimal 配置点。通过式(18)估计随机响应的 aPC 系数并利用式(14)求解结构的随机响应。

步骤 1)、2) 旨在构建实验数据下结构输入参数的新型随机模型。为高效确定后续的随机响应, 步骤 3) 将模型中的 KL 随机系数进一步用 aPC 展开。最后, 步骤 4) 开发了有限数据下基于 aPC 的随机响应分析方法, 从而形成了有限数据下工程结构的随机建模和后续响应传播的统一框架。注意到, 由于步骤 2) 中的新型随机场模型考虑了输入参数分布与 KL 随机系数分布之间的内在关系, 因此本文的随机模型可以准确地重构结构参数的边缘分布和二阶相关性, 从而有效地构建了结构输入参数的非高斯特征。此外, 本文发展了结构响应求解的 D-optimal 加权插值法, 实现了结构随机响应的高效高精度求解。由于本文方法可对结构输入参数进行合理地随机建模, 并进行高效的随机响应分析提供了一个有效的框架。

3 工程算例

在实际工程中, 工程结构的不确定参数往往分为 2 大类: 1) 工程结构自身的机械和几何特性。例如, 由于成分和制造工艺的原因, 复合材料的杨氏模量通常表现出空间变异性。在实际工程中, 人们不可能完全地确定杨氏模量的概率信息, 只能得到一组从有限数目的试件中识别出的杨氏模量的实验数据; 2) 工程结构参数不确定性则源于外荷载。例如, 地震动是一种具有强烈时空变异性的自然灾害, 在特定的场地条件下, 记录到的真实地震动时程往往十分有限。本文通过非线性结构在有限地震动数据下的随机分析的来说明所发展方法的应用。有限的加速度时程记录从太平洋地震工程研究中心建立的 NGA 强震数据库中根据如下特定场地标准选择出来: 地震震级 $5 \leq M \leq 6$, 震源距离 $1 \text{ km} \leq D \leq 20 \text{ km}$, 中硬土, 土层的剪切波速 $V_s \geq 600 \text{ m/s}$ 。满足此准则的地震动记录共 102 条, 将处理后的 18 s 的时程离散为 1 801 个点, 步长 $\Delta t = 0.01 \text{ s}$, 如图 1 所

示。为保留 95% 以上的总能量, 此算例截断项数取为 50。

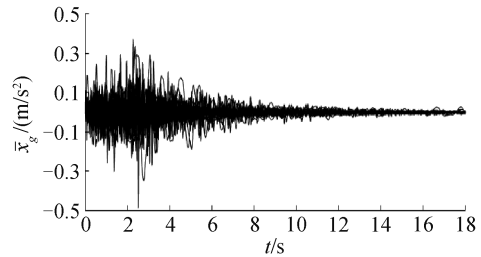


图 1 根据准则选出的 102 条地震动时程

Fig. 1 A total of 102 observed time histories selected according to the criteria

方差是反映随机地震动统计特性的一个重要指标。为验证本文模型随机地震动的性能, 图 2 给出了地震动时程的方差。由于随机地震动方差在整个时程中波动剧烈, 对整个时程而言, 地震动方差的值不在一个数量级, 为便于观察, 本文仅展示了 0~8 s 的结果。可以看出, 传统 KDE 模型给出的边缘分布明显偏离了观测值, 而本文建模方法给出的地震动时程的方差与观测值良好匹配。图 3 给出了 $t = 1.5 \text{ s}$ 、 $t = 6.5 \text{ s}$ 、 $t = 11.5 \text{ s}$ 和 $t = 16.5 \text{ s}$ 处地震动时程的观测边缘分布与模型边缘分布的 Q-Q 图, 即 Quantile-Quantile 图。传统 KDE 模型给出的边缘分布明显偏离了观测到的边缘分布, 无法捕捉到地震动的非高斯特征。相比之下, 本文的随机模型给出的边缘分布与观测结果吻合良好, 说明了本文建模方法的有效性。

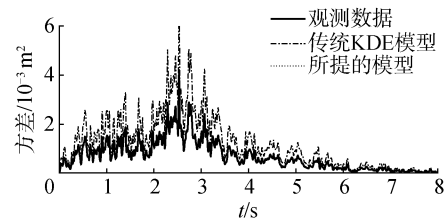


图 2 0~8 s 地震动的方差

Fig. 2 Variances of seismic ground motions from 0~8 s

为了验证所发展的结构随机响应分析方法的性能, 本文进一步研究了 20 自由度滞回非线性结构在受随机地震动激励下的随机响应。其中, 结构的质量和层间刚度参数如表 1 所示。

结构的非线性行为由 Bouc-Wen 滞回模型表征, 其控制方程为:

$$M\ddot{\mathbf{X}} + C\dot{\mathbf{X}} + \alpha\mathbf{K}\mathbf{X} + (1 - \alpha)\mathbf{K}\mathbf{Z} = -M\ddot{\mathbf{x}}_g(t, \theta) \quad (22)$$

式中: \mathbf{X} 、 $\dot{\mathbf{X}}$ 和 $\ddot{\mathbf{X}}$ 分别为位移、速度和横向加速度向量; $\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_{20})$ 为质量矩阵; \mathbf{K} 为初始刚度矩阵。阻尼采用 Rayleigh 阻尼, 即 $\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$ 。其中 $a = 0.2463 \text{ s}^{-1}$, $b = 0.0071 \text{ s}$ 。 $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1,$

$Z_2, \dots, Z_{20})^T$ 为滞回位移。Bouc-Wen 模型的参数取为 $\alpha = 0.04, A = 1, n = 1, q = 0.3, p = 10, d_\psi = 5, \lambda =$

$0.5, \psi = 0.05, \beta = 100, \gamma = 180, d_v = 1\ 000, d_\eta = 1\ 000, \xi = 0.2$ 。

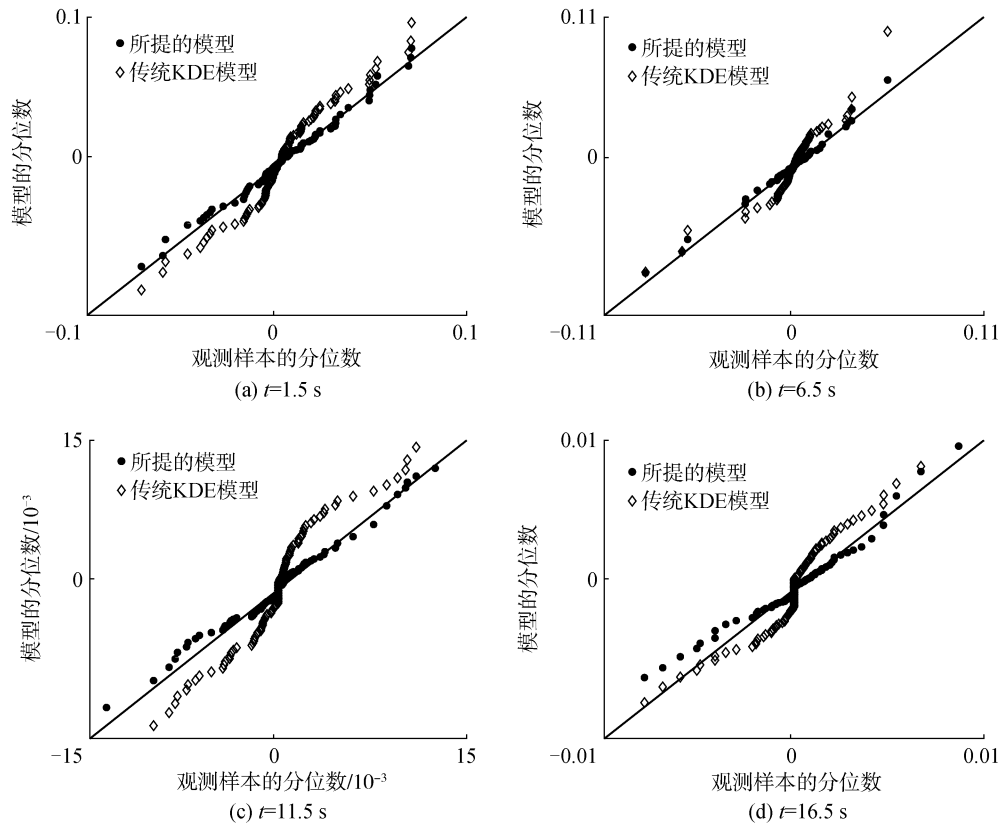


图 3 4 个典型时刻下地震动边缘分布的 Q-Q 图

Fig. 3 Q-Q plots of marginals of seismic ground motions at four typical time points

表 1 20 自由度非线性结构的质量和层间刚度

Table 1 The values of lumped mass and inter-story stiffness of 20-DOF nonlinear structure

层数	集中质量/ 10^5 kg	层间刚度 $10^8/(N/m)$
1~2	4.5	3.5
3~12	4.3	3.2
13~17	4.1	3.0
18~20	3.9	2.8

在本算例中,式(16)中用于构造 aPC 基函数的 KL 独立样本个数选取为 $K = 10^5$, D-optimal 实验设计中候选样本容量取为 $N^c = 10^4$ 。将所得系统响应与 2×10^4 次 MCS 给出的参考值进行比较,评估了所提响应分析方法的精度。分析结果显示,2 阶 aPC 展开即可对系统随机响应进行高精度近似。此时,

只需对式(22)中的非线性滞回系统进行 $(50+2)! / (50! 2!) = 1\ 326$ 次确定性评估。因此,本文方法可对受随机地震动激励的强非线性系统进行高效高精度的响应分析。为更直观说明本文方法的求解精度,部分随机响应分析的结果展示如下。图 4 和图 5 分别给出了 1 阶和 2 阶 aPC 展开所得的第 2 层随机位移响应的均值和方差及相应的绝对误差,而图 6 给出了第 15 层在 $t = 1.5$ s 时的位移响应及相应的绝对误差。可以看出,由于结构的强非线性行为,采用 1 阶 aPC 展开并不能充分地近似结构响应。然而,当使用 2 阶 aPC 展开时,本文方法对系统随机响应的近似精度迅速上升,实现了系统响应的高精度预测。

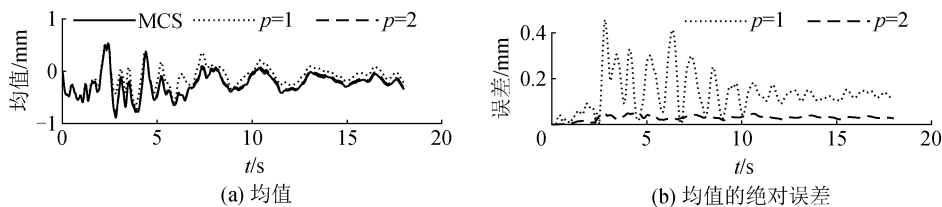


图 4 第 2 层位移响应的均值及均值的绝对误差

Fig. 4 Mean values of stochastic responses of 2-story and corresponding absolute errors

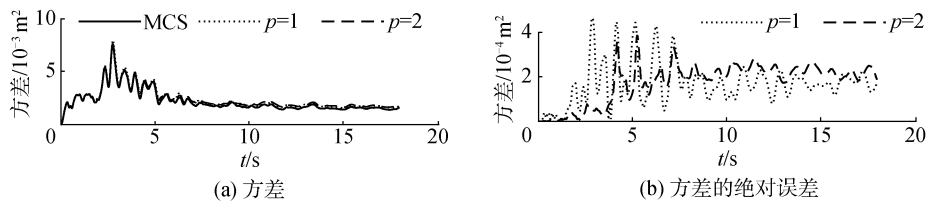


图 5 2 层位移响应的方差及方差的绝对误差

Fig. 5 Standard deviations of stochastic responses of 2-story and corresponding absolute values

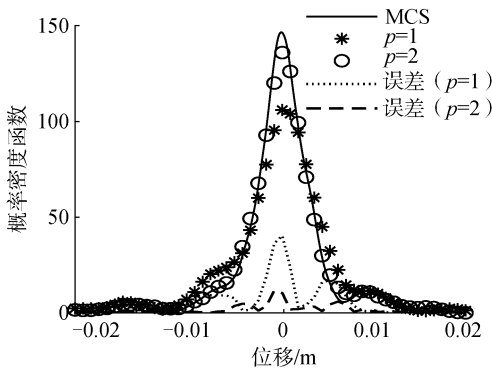


图 6 $t=1.5\text{ s}$ 第 15 层位移响应的概率密度函数及绝对误差
Fig. 6 Distributions of the seismic response of 15-story at $t=1.5\text{ s}$ and corresponding absolute errors

4 结论

1) 本文开发的随机模型考虑了结构参数分布与 KL 随机系数分布之间的内在关系,可准确地重构输入参数的边缘分布和二阶相关性,从而有效地捕捉结构参数的非高斯特征。

2) 本文构造的输入参数任意多项式混沌表示配合所发展的 D-optimal 加权插值法可实现非线性系统随机响应的高效高精度评估,从而为有限实验数据下工程结构的随机分析提供了一个有效的框架。

3) 算例验证了本文方法在随机维数为 50 维的问题中的有效性。但是,此方法在更高维度随机问题中的应用有待进一步研究。

参考文献:

[1] 李杰. 工程结构可靠性分析原理[M]. 北京: 科学出版社, 2021.
LI Jie, Fundamental of structural reliability analysis[M], Beijing: Scientific Press, 2021.

[2] GHANEM R G, SPANOS P D. Stochastic finite elements: a spectral approach[M]. New York: Springer New York, 1991.

[3] LI Jie, CHEN Jianbing. The principle of preservation of probability and the generalized density evolution equation [J]. Structural safety, 2008, 30(1): 65-77.

[4] CHEN Guohai, YANG Dixiong. Direct probability integral method for stochastic response analysis of static and dynamic structural systems[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2019, 357: 112612.

[5] CHEN Jianbing, KONG Fan, PENG Yongbo. A stochastic harmonic function representation for non-stationary stochastic processes[J]. Mechanical systems and signal processing, 2017, 96: 31-44.

[6] DAI Hongzhe, ZHANG Ruijing, BEER M. A new perspective on the simulation of cross-correlated random fields[J]. Structural safety, 2022, 96: 102201.

[7] ZHANG Ruijing, DAI Hongzhe. A non-Gaussian stochastic model from limited observations using polynomial chaos and fractional moments[J]. Reliability engineering & system safety, 2022, 221: 108323.

[8] 李建宇, 杨坤, 王博, 等. 小样本数据下圆柱薄壳初始缺陷不确定性量化的极大熵方法[J]. 力学学报, 2023, 55(4): 1028-1038.
LI Jianyu, YANG Kun, WANG Bo, et al. A maximum entropy approach for uncertainty quantification of initial geometric imperfections of thin-walled cylindrical shells with limited data[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics, 2023, 55(4): 1028-1038.

[9] ZHANG Ruijing, DAI Hongzhe. Independent component analysis-based arbitrary polynomial chaos method for stochastic analysis of structures under limited observations [J]. Mechanical systems and signal processing, 2022, 173: 109026.

[10] WANG Yu, ZHAO Tengyuan, PHOON K K. Statistical inference of random field auto-correlation structure from multiple sets of incomplete and sparse measurements using Bayesian compressive sampling-based bootstrapping[J]. Mechanical systems and signal processing, 2019, 124: 217-236.

[11] PASPARAKIS G D, DOS SANTOS K R M, KOU-GIOUMTZOGLOU I A, et al. Wind data extrapolation and stochastic field statistics estimation via compressive sampling and low rank matrix recovery methods[J]. Mechanical systems and signal processing, 2022, 162: 107975.

[12] MONTOYA-NOGUERA S, ZHAO Tengyuan, HU Yue, et al. Simulation of non-stationary non-Gaussian random fields from sparse measurements using Bayesian compressive sampling and Karhunen-Loève expansion[J]. Structural safety, 2019, 79: 66-79.

[13] GHANEM R G, DOOSTAN A. On the construction and analysis of stochastic models; characterization and propagation of the errors associated with limited data[J]. Journal of computational physics, 2006, 217(1): 63-81.

[14] MEHREZ L, DOOSTAN A, MOENS D, et al. Stochastic identification of composite material properties from limited experimental databases, Part II: uncertainty modelling [J]. Mechanical systems and signal processing, 2012,

- 27: 484–498.
- [15] DAS S, GHANEM R, SPALL J C. Asymptotic sampling distribution for polynomial chaos representation of data: a maximum entropy and fisher information approach [C]// Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control. Piscataway, NJ: IEEE, 2006: 4139–4144.
- [16] DAS S, GHANEM R, FINETTE S. Polynomial chaos representation of spatio-temporal random fields from experimental measurements [J]. *Journal of computational physics*, 2009, 228(23): 8726–8751.
- [17] SOIZE C. Polynomial chaos expansion of a multimodal random vector [J]. *ASA journal on uncertainty quantification*, 2015, 3(1): 34–60.
- [18] SILVERMAN B W. Density estimation for statistics and data analysis [M]. New York: CRC Press, 2018.
- [19] XIU Dongbin, KARNIADAKIS G E. The Wiener: askey polynomial chaos for stochastic differential equations [J]. *SIAM journal on scientific computing*, 2002, 24(2): 619–644.
- [20] RAHMAN S. A polynomial chaos expansion in dependent random variables [J]. *Journal of mathematical analysis and applications*, 2018, 464(1): 749–775.
- [21] ZHANG Ruijing, DAI Hongzhe. Stochastic analysis of structures under limited observations using kernel density estimation and arbitrary polynomial chaos expansion [J]. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2023, 403: 115689.
- [22] SOIZE C, GHANEM R. Physical systems with random uncertainties: chaos representations with arbitrary probability measure [J]. *SIAM journal on scientific computing*, 2004, 26(2): 395–410.
- [23] WITTEVEEN J A S, BIJL H. Modeling arbitrary uncertainties using gram-schmidt polynomial chaos [C]// Proceedings of the 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reston, Virginia: AIAA, 2006: AIAA2006–896.
- [24] DAI Hongzhe, ZHANG Ruijing, BEER M. A new method for stochastic analysis of structures under limited observations [J]. *Mechanical systems and signal processing*, 2023, 185: 109730.
- [25] BERVEILLER M, SUDRET B, LEMAIRE M. Stochastic finite element: a non intrusive approach by regression [J]. *European journal of computational mechanics*, 2006, 15(1/2/3): 81–92.
- [26] GUO Ling, NARAYAN A, YAN Liang, et al. Weighted approximate feketete points: sampling for least-squares polynomial approximation [J]. *SIAM journal on scientific computing*, 2018, 40(1): A366–A387.

本文引用格式:

张瑞景,戴鸿哲. 有限实验数据下工程结构概率建模及随机响应分析 [J]. *哈尔滨工程大学学报*, 2024, 45(4): 674–681.

ZHANG Ruijing, DAI Hongzhe. Probabilistic modeling and stochastic response analysis of engineering structures with experimental data [J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2024, 45(4): 674–681.